

بسم الله الرحمن الرحيم

**کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها**

ابوالفضل گیلک

**جلسه هفتم – فصل چهارم
تست های 1 الی 16
ویژگی های زبان های منظم**

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

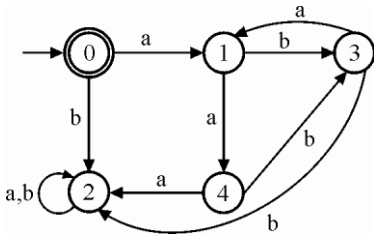
مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 4

تست‌های 1 الی 16

ویژگی‌های زبان‌های منظم

- 1- اگر M یک ماشین حالت متناهی قطعی (DFA) باشد می‌گوییم دو رشته x و y نسبت به M با هم معادلند، هرگاه $(s, x) \xrightarrow[M]{*} q \Leftrightarrow (s, y) \xrightarrow[M]{*} q$ که در آن s حالت شروع و q یک حالت دلخواه ماشین است. کلاس‌های هم‌ارزی رشته‌ها نسبت به ماشین زیر کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر - 1400)



- (1) $[aa], [ab], [\varepsilon]$
- (2) $[\varepsilon], [a], [ab], [bb]$
- (3) $[\varepsilon], [a], [ab], [aab], [b]$
- (4) $[b], [aa], [ab], [a], [\varepsilon]$

- 2- از اتوماتون متناهی قطعی M روی الفبای Σ ، یک اتوماتون غیرقطعی M' به این ترتیب ساخته شده است که مجموعه حالات M' شامل مجموعه حالات M و یک حالت شروع جدید است و گذارهای M' شامل گذارهای M و گذار λ از حالت شروع جدید به تمام حالات M است. در مورد زبان $L(M')$ کدام گزینه درست است؟ (علوم کامپیوتر - 95)

- (1) $L(M') = \Sigma^*$
- (2) $L(M') = L(M)$
- (3) $L(M') = \{x : x \in \text{suffix}(w) \text{ for some } w \in L(M)\}$
- (4) $L(M')$ را نمی‌توان به طور دقیق مشخص کرد.

- 3- فرض کنید $A \subseteq \{0,1\}^*$ یک زبان منظم و $S \subseteq \{0,1\}^*$ یک مجموعه دلخواه باشد. اگر L_{AS} به صورت زیر تعریف شود، کدام گزینه درباره L_{AS} همواره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 94)

- (1) منظم است.
- (2) نه مستقل از متن است و نه منظم
- (3) مستقل از متن است ولی مستقل از متن قطعی نیست.
- (4) مستقل از متن است ولی منظم نیست.

- 4- زبان‌های منظم $L_1 \subseteq \Sigma^*$ و $L_2 \subseteq \Sigma^*$ داده شده‌اند، کدام گزاره درست نیست؟ (علوم کامپیوتر - 92)

- (1) $L_1 \cap L_2$ لزوماً منظم نیست.
- (2) متمم زبان $(L_1 \cap L_2)^*$ مستقل از متن است.
- (3) نگاشت‌های یک به یک $f_i : L_i \rightarrow \Sigma^*$ ($i=1,2$) وجود دارند.
- (4) حتماً زبان مستقل از متن L_3 وجود دارد به طوری که $L_1 \cap L_2 \subseteq L_3$

- 5- زبان داده شده $L = \{a^m b^n c^k : m, n, k \in \mathbb{N}; m > 5; \exists t \in \mathbb{N} (n+k=2t)\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟ (علوم کامپیوتر - 92)

- (1) زبان L مستقل از متن نیست.
- (2) متمم زبان L مستقل از متن است.
- (3) با لم تزریق می‌توان نشان داد که زبان L منظم نیست.
- (4) هیچ گرامری برای تولید متمم زبان L وجود ندارد.

- 6- می‌گوییم دو رشته x و y نسبت به زبان L هم‌ارزند، اگر برای هر $z \in L^*$ داشته باشیم $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ اکنون زبان $L = (ab \cup aab)^*$ را در نظر بگیرید، کلاس‌های هم‌ارزی L کدام‌ها هستند؟ (مهندسی کامپیوتر - 91)

- (1) $[b], [a], [\varepsilon]$
- (2) $[b], [aab], [ab]$
- (3) $[b], [aa], [a], [\varepsilon]$
- (4) $[aab], [ab], [a], [\varepsilon]$

- 7- زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ را جایگشتی گوئیم هرگاه یک اتوماتون قطعی متناهی M موجود باشد به طوریکه هر رشته $x \in \{0,1\}^*$ عضو L است اگر و تنها اگر اتوماتون M جایگشتی از رشته x را بپذیرد. کدام گزینه درست است؟ (علوم کامپیوتر - 91)
- (1) هر زبان منظم جایگشتی است.
 - (2) هر زبان جایگشتی منظم است.
 - (3) هر زبان جایگشتی مستقل از متن است.
 - (4) هر زبان مستقل از متن جایگشتی است.

- 8- به ازای دو عدد صحیح و ثابت $q > 0$ و $r > 0$ کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن است ولی منظم نیست؟ (علوم کامپیوتر - 90)

$$\begin{aligned} (1) \quad L &= \{1^{mq+r} 0^{qr} : m \geq 0\} \\ (2) \quad L &= \{1^{mq+r} 0^{mr} : m \geq 0\} \\ (3) \quad L &= \{1^{mq^2+r} 0^{q^2} : m \geq 0\} \\ (4) \quad L &= \{1^{mq^2+rm} : m \geq 0\} \end{aligned}$$

- 9- کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 90)
- (1) شرایط لازم و کافی برای منظم نبودن یک زبان وجود دارند ولی هنوز کشف نشده‌اند.
 - (2) هیچ شرط لازم و کافی برای منظم نبودن یک زبان وجود ندارد.
 - (3) لم pumping یک شرط لازم برای منظم نبودن یک زبان ارائه می‌دهد.
 - (4) لم pumping یک شرط کافی برای منظم نبودن یک زبان ارائه می‌دهد.

- 10- کدام گزینه نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 89)
- (1) اگر زبان‌های L_1 و L_2 منظم باشند، زبان $L_1 \cap L_2$ منظم است.
 - (2) همه اتوماتون‌های مینیمال برای یک زبان منظم داده شده دارای تعداد مساوی حالت پایانی هستند.
 - (3) هر زبان منظم با یک λ -NFA که دقیقاً یک حالت پایانی دارد پذیرفته می‌شود.
 - (4) اگر E یک عبارت منظم باشد و زبان آن، $L(E)$ ، نامتناهی باشد آن‌گاه E باید شامل عملگر ستاره (*) باشد.

- 11- اگر $L \subseteq \{0,1\}^*$ زبان گرامر زیر باشد، کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 86)
- $$\begin{aligned} (1) \quad L &\text{ منظم است.} \\ (2) \quad L^c &\text{ منظم است.} \\ (3) \quad L &\text{ مستقل از متن است.} \\ (4) \quad L &= \{0^n 1^m \mid n+m \text{ زوج است}\} \end{aligned}$$

- 12- زبان‌های مستقل از متن $L_1 = \{a^n b a^m \mid n \geq m \geq 0\}$ و $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}$ مفروضند. کدام گزینه در مورد زبان $L = \{x \mid xy \in L_1, y \in L_2\}$ درست است؟ (مهندسی کامپیوتر - 79)

$$\begin{aligned} (1) \quad L &= \{a^n b \mid n \geq 0\} \\ (2) \quad L &= \{a^n b a^m \mid n \geq m \geq 0\} \\ (3) \quad L &= \{a^n b a^{m+1} \mid n \geq m \geq 0\} \\ (4) \quad L &= \{a^n b a^m \mid n \geq m \geq 0\} \end{aligned}$$

- 13- فرض کنید L زبانی منظم باشد، کدام یک از زبان‌های زیر منظم نیست؟ (علوم کامپیوتر - 88)

$$\begin{aligned} (1) \quad L' &= \{x \in L \mid \exists y \in L \ x = yy\} \\ (2) \quad L' &= \{x \in L \mid x^R \in L\} \\ (3) \quad L' &= \{x \in L \mid \exists y \in L \ xy \in L\} \\ (4) \quad L' &= \{x \in L \mid \exists y \in L \ \exists z \in L \ x = yz\} \end{aligned}$$

14- می‌گوییم زبان L Definite است اگر عدد k وجود داشته باشد که برای هر رشته w ، تعلق آن به زبان تنها وابسته به آخرین k نماد، w باشد. کدام گزینه نادرست است؟
(مهندسی کامپیوتر - 85)

مثال از زبان Definite: $(a+b)^*cde$ که در آن $k=3$ است.

- (1) زبان‌های Definite تحت عمل اجتماع بسته هستند. (2) زبان‌های Definite تحت عمل مکمل‌گیری بسته هستند.
(3) هر زبان Definite با یک ماشین متناهی پذیرفته می‌شود. (4) زبان‌های Definite تحت عمل $*$ (Kleene star) بسته هستند.

15- زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ به صورت زیر تعریف شده است: (λ نمایانگر کلمه پوچ به طول صفر است).

- $\lambda \in L$
- اگر $x \in L$ آن‌گاه $0x1 \in L$
- اگر $x \in L$ و $y \in L$ آن‌گاه $xy \in L$

کدام گزینه صحیح است؟
(علوم کامپیوتر - 84)

- (1) L منظم است ولی در هر کلمه از این زبان لزوماً تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی نیست.
(2) L منظم است و در هر کلمه از این زبان تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی است.
(3) L منظم نیست ولی در هر کلمه از این زبان تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی است.
(4) L منظم نیست و در هر کلمه از این زبان لزوماً تعداد 0 ها با تعداد 1 ها مساوی نیست.

16- برای کدام تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ زبان $L_f = \{0^n 1^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0,1\}^*$ منظم نیست؟
(علوم کامپیوتر - 84)

- (1) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases}$ (2) $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{زوج } n \\ 2n+1 & \text{فرد } n \end{cases}$ (3) $f(n) = 15$ (4) $f(n) = 16$

پاسخ‌ها

فصل 4: ویژگی‌های زبان‌های منظم

تست‌های 1 الی 16

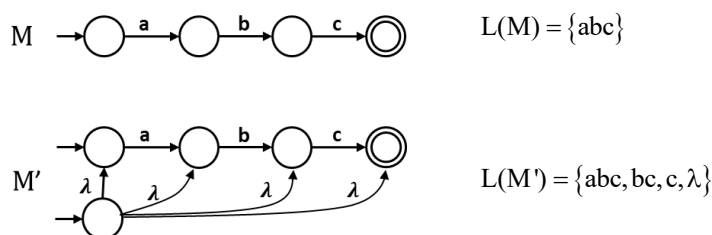
1- گزینه (4) صحیح است.

رشته‌های x و y با هم رابطه دارند و هم کلاسند اگر و تنها اگر با مصرف هر هردوی آنها به یک حالت مشترک برسیم. برای مثال رشته‌های b و bab و baa در کلاس مشترکی قرار دارند چون با مصرف همه آنها به حالت 2 می‌رسیم. در DFA به ازای هر حالت ماشین دقیقاً یک کلاس داریم:

- 0: $[\varepsilon]$
- 2: $[b]$
- 3: $[ab]$
- 4: $[aa]$

2- گزینه (3) صحیح است.

یک نمونه از M و M' را نشان داده‌ایم. حالت تله را رسم نکرده‌ایم.



توجه: اگر در ماشین M از هر حالت به حالت پذیرش انتقال λ اضافه کنیم ماشین جدید مجموعه پسوندهای $L(M)$ را می‌پذیرد.

3- گزینه صحیح وجود ندارد.

کلید اولیه گزینه 1 بوده اما در کلید نهایی این مساله حذف شد.

گر $xy \in S$ و $y \in A$ آنگاه $x \in L_{A,S}$. پس: $L_{A,S} = \frac{S}{A}$

اگر $A = \{\lambda\}$ باشد برای هر S داریم: $L_{A,S} = S/A = S$ پس هیچ کدام از گزینه‌ها همیشه درست نیست.

توجه: اگر به جای A مجموعه S منظم فرض می‌شد گزینه 1 درست بود.

4- گزینه (1) صحیح است.

زبان‌های منظم تحت عملگرهای اشتراک، بستار و متمم بسته‌اند. هر زبان منظم، مستقل از متن است. هر زبان L زیرمجموعه Σ^* است و تابع $f: L \rightarrow \Sigma^*$ با ضابطه $f(w) = w$ نگاشتی یک به یک است. درستی گزینه 4 نیز واضح است مثلاً L_3 می‌تواند Σ^* باشد.

5- گزینه (2) صحیح است.

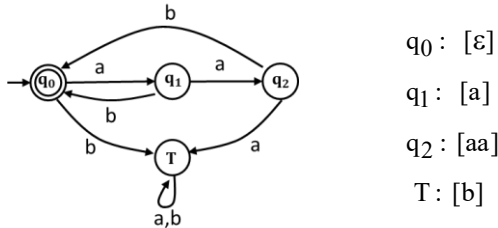
L منظم است و به سادگی می‌توان عبارت منظم معادل با آن را نوشت:

$$L = L\left(a^6 a^* \left((bb)^* (cc)^* + (bb)^* bc(cc)^*\right)\right)$$

پس متمم آن نیز منظم است و هر زبان منظم یک زبان مستقل از متن است. هر زبان منظم دارای گرامری منظم است.

6- گزینه (3) صحیح است.

عبارت $z \in L^*$ در صورت سوال باید به شکل $z \in \Sigma^*$ اصلاح شود. رابطه داده شده یک رابطه هم‌ارزی است و تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر با تعداد حالات DFA کمینه است. تمام رشته‌هایی که با مصرف آنها به q_i می‌رسیم در کلاس هم‌ارزی نظیر q_i قرار دارند. پس ابتدا DFA کمینه پذیرنده $L = L(ab + aab)^*$ را بیابیم. حالت تله هم کلاس هم‌ارزی خود را دارد:



7- گزینه (1) صحیح است.

(یکی از جایگشت‌های x خود x است.) اگر L منظم باشد دارای یک DFA پذیرنده است که هر $x \in L$ را می‌پذیرد. پس یکی از جایگشت‌های x را می‌پذیرد. پس هر زبان منظم، یک زبان جایگشتی است. سایر گزینه‌ها نادرستند. زبان $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$ نه منظم است و نه مستقل از متن است. اما یکی از جایگشت‌های رشته‌هایش زبان منظم $\{(abc)^n : n \geq 1\}$ است که DFA پذیرنده دارد.

8- گزینه (2) صحیح است.

اعداد صحیح q و r دو عدد ثابت هستند پس برای گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ منظم هستند. در گزینه ۲ ارتباط خطی بین توان‌ها وجود دارد پس منظم نیست.

9- گزینه (4) صحیح است.

لم تزریق زبان‌های منظم، یک شرط کافی برای منظم نبودن زبان را در اختیار ما می‌گذارد..

10- گزینه (1) صحیح است.

مثلاً $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ نامنظم است، $L_1 = \{\lambda, ab\}$ زیرمجموعه متناهی آن است پس منظم است و $L_1 \cap L_2 = L_1$. درستی گزینه‌های ۲ و ۳ در متن درس گفته شده است. درستی گزینه ۴ واضح است. عباراتی مانند $(a+b).(a+ab)^2$ که عملگر بستار ندارند تعدادی متناهی رشته را توصیف می‌کنند اما با عملگر بستار، مانند a^* می‌توان بی‌نهایت رشته را توصیف کرد. (a^+ نیز خلاصه شده a^*a است.)

11- گزینه (4) صحیح است.

گرامر داده شده خطی راست است. پس منظم است. $L(G)$ منظم است پس مکمل آن هم منظم است. هر زبان منظم مستقل از متن است. اما گزینه ۴ نادرست است: زبان $L(G)$ برابر $L((00)^*(11)^*)$ است پس زیرمجموعه گزینه ۴ است ولی با آن برابر نیست.

12- گزینه (4) صحیح است.

اگر $xy \in L_1$ و $y \in L_2$ آنگاه $x \in L$. پس:

$$L = L_1 / L_2$$

اعضای L_1 به a ختم می‌شوند، پس رشته‌های L_2 فقط به‌ازای $m = 0$ پسوند اعضای L_1 هستند.

$$L = L_1 / L_2 = \{a^n b a^m \mid n \geq m \geq 0\}$$

13- گزینه (1) صحیح است.

L منظم است پس $\text{prefix}(L), \text{suff}(L), LL, L^R$ منظم هستند. گزینه ۲ اشتراک L و L^R است، پس منظم است. در گزینه ۳ y می‌تواند λ باشد پس گزینه ۳ برابر L است پس منظم است. گزینه ۴ برابر $L^2 \cap L$ است اشتراک دو زبان منظم، منظم می‌شود. گزینه ۱ لزوماً منظم نیست. اگر $L = \Sigma^*$ باشد آنگاه $L' = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ منظم نیست.

14- گزینه (4) صحیح است.

برای توضیح راحت تر فرض کنید $\Sigma = \{a, b\}$ و $k = 3$ باشد. L_1 مجموعه تمام رشته‌هایی باشد که پسوند aba یا abb دارند و L_2 مجموعه تمام رشته‌هایی باشد که پسوند bbb یا abb دارند. در اینصورت:
 $L_1 \cup L_2$ مجموعه تمام رشته‌هایی است که پسوند aba یا abb یا bbb دارند.
 $L_1 \cap L_2$ مجموعه تمام رشته‌هایی است که پسوند abb دارند. $\overline{L_1}$ مجموعه تمام رشته‌هایی است که سه حرف پایانی آنها هر چیز به جز aba و abb باشد. پس زبان‌های معین، نسبت به این عملگرها بسته هستند. اما عضویت یک رشته در $L_1 L_2$ و L_1^* را نمی‌توان تنها بر اساس سه حرف پایانی آن تعیین کرد. پس معین‌ها نسبت به الحاق و بستار، بسته نیستند.

15- گزینه (3) صحیح است.

تعریف بازگشتی را به قواعد گرامر تبدیل کنیم:

$$G : S \rightarrow 0S1 \mid SS \mid \lambda$$

این گرامر، مستقل از متن است و زبان زیر را تولید می‌کند:

$$L(G) = \{w \in (0+1)^* : n_0(w) = n_1(w), \forall u \in \text{prefix}(w), n_0(u) \geq n_1(u)\}$$

این زبان، مستقل از متن و نامنظم است.

16- گزینه (2) صحیح است.

اگر f یک یا چند مقدار ثابت داشته باشد L_f منظم است. (گزینه‌های یک، سه، چهار). اگر f درجه یک باشد یا به تعدادی متناهی تابع درجه یک قابل تفکیک باشد، L_f مستقل از متن است ولی منظم نیست. مانند گزینه دو.
 اگر f تابعی غیرخطی از قبیل $n!, n^2$ باشد، L_f مستقل از متن نیست.

پیروز و سربلند باشید.

پایان جلسه هفتم نکته و تست